1.5.11 Dělitelnost - shrnutí

Předpoklady: 010509

Shrnutí dělitelnosti

Důležité znalosti

- $403 = 4\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0$, stejné i s jinými základy $\Rightarrow$
  - $(1011)_2 = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$,
  - při převádění z desítkové soustavy hledáme skupiny od největší (například 2^4, 2^3, ..),
  - každá soustava potřebuje jen tolik číslic, jaký má základ,
  - šestnáctková soustava: $a = 10$, $b = 11$, ...,
- podle dělení rozdělujeme do zbytkových tříd ($3k+1$ - při dělení třemi zbytek 1),
- součin *n* po sobě jdoucích čísel je dělitelný *n* (a všemi menšími přirozenými čísly),
- důkazy dělitelnosti: součiny po sobě jdoucích čísel ($\Rightarrow$ rozkládání na součin) nebo dosazování zbytkových tříd,
- $abcd = a\cdot 1000 + b\cdot 100 + c\cdot 10 + d = 100(a\cdot 10 + b) + c\cdot 10 + d \Rightarrow$ znaky dělitelnosti čísel, která můžeme sestavit z 2 a 5,
  - 2, 5, 10 – dělitelnost poslední cifry,
  - 4, 25, 20, 50, 100 – dělitelnost posledního dvojčíslí,
  - 8, 125, … - dělitelnost posledního trojčíslí,
- $abcd = a\cdot(999+1) + b\cdot(99+1) + c\cdot(9+1) + d = 9(a\cdot 111 + b\cdot 11 + c) + a + b + c + d \Rightarrow$ dělitelnost 3 a 9 podle ciferného součtu,
- $6 = 2\cdot 3$ dělitelné šesti, když je dělitelné 2 a 3 (nefunguje pro soudělná čísla jako $8 = 4\cdot 2$),
- prvočíselný rozklad je jednoznačný,
- $\mathrm{D}(18,24) = 6$ (společné v prvočíselných rozkladech),
- $\mathrm{n}(18,24) = 72$ (největší vyskytující se v prvočíselných rozkladech).

Zádrhele

- 1 není prvočíslo, 2 je prvočíslo,
- součet po sobě jdoucích čísel obecně nic neříká o dělitelnosti.

Dobré rady

- dokazování prvočíselnosti jen přes prvočísla menší než druhá odmocnina,
- při důkazech dělitelnosti se vyplatí vytvořit součin,
- při vytváření prvočíselných rozkladů je lepší dělit větším číslem ($60 = 6\cdot 10 =$).

Př. 1: Převeď čísla do označené číselné soustavy.

a) $(10101)_2 = (\ )_{10}$ b) $(10101)_3 = (\ )_{10}$ c) $(A2)_{16} = (\ )_{10}$

d) $(29)_{10} = (\ )_2$ e) $(30)_{10} = (\ )_4$ f) $(42)_{10} = (\ )_{16}$

a) $(10101)_2 = (\ )_{10}$

$(10101)_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 16+4+1 = 21$

b) $(10101)_3 = (\ )_{10}$

$(10101)_3 = 1\cdot 3^4 + 0\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 81+9+1 = 91$

c) $(A2)_{16} = (\ )_{10}$

$(A2)_{16} = 10\cdot 16^1 + 2\cdot 16^0 = 160+2 = 162$

d) $(29)_{10} = (\ )_2$

$29 = 16+8+4+1 = 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = (11101)_2$

e) $(30)_{10} = (\ )_4$

$30 = 16+3\cdot 4+2 = 1\cdot 4^2 + 3\cdot 4^1 + 2\cdot 4^0 = (132)_4$

f) $(42)_{10} = (\ )_{16}$

$42 = 2\cdot 16+10 = 2\cdot 16^1 + 10\cdot 16^0 = (2A)_{16}$

Př. 2: Kolik po sobě jdoucích přirozených čísel musíme vynásobit, aby byl jejich součin určitě dělitelný osmi?

Platí: $8 = 4\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 2$ $\Rightarrow$ součin musí obsahovat buď tři čísla dělitelná dvěma, nebo číslo dělitelné čtyřmi a ještě další číslo dělitelné dvěma.
Součin čtyř po sobě jdoucích čísel:

- jedno číslo dělitelné čtyřmi,
- jedno další číslo dělitelné dvěma.

$\Rightarrow$ Musíme vynásobit alespoň čtyři po sobě jdoucí čísla, aby byl jejich součin jistě dělitelný osmi.

Př. 3: Najdi $\mathrm{n}(60,72)$ a $\mathrm{D}(60,72)$.

$60 = 6\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 3\cdot 5$
$72 = 8\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 2^3\cdot 3^2$
$\mathrm{D}(60,72) = 2^2\cdot 3 = 12$
$\mathrm{n}(60,72) = 2^3\cdot 3^2\cdot 5 = 8\cdot 9\cdot 5 = 360$

Př. 4: Dokaž, že pro každé přirozené číslo n platí: $2 \mid n^3 + n$.

Nejdříve upravíme výraz $n^3 + n = n\left(n^2+1\right)$ $\Rightarrow$ nemůžeme číslo interpretovat jako součin po sobě jdoucích čísel $\Rightarrow$ zkusíme dokazovat pomocí zbytkových tříd.
Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle dělitelnosti dvěma do dvou množin $n = 2k$ a $n = 2k+1$.

- pro $n = 2k$: $n^3 + n = n\left(n^2+1\right) = 2k\left[(2k)^2+1\right] = 2\cdot k\left[(2k)^2+1\right]$ $\Rightarrow$ je dělitelné dvěma.

- pro $n=2k+1$: $n^3+n=n\left(n^2+1\right)=(2k+1)\left[(2k+1)^2+1\right]=(2k+1)\left[4k^2+4k+1+1\right]=$
$=(2k+1)\left(4k^2+4k+2\right)=(2k+1)\cdot 2\cdot\left(2k^2+2k+1\right)$

  $\Rightarrow$ je dělitelné dvěma.

Jiná možnost není $\Rightarrow$ pro každé přirozené číslo *n* platí: $2\mid n^3+n$.

Př. 5: Jakým největším číslem je určitě dělitelný součin pěti po sobě jdoucích čísel?

Součin pěti po sobě jdoucích čísel: $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$:

- alespoň dvě čísla dělitelná dvěma, jedno z nich čtyřmi,
- alespoň jedno číslo dělitelné třemi,
- alespoň jedno číslo dělitelné pěti,

$\Rightarrow$ součin je dělitelný $2\cdot 4\cdot 3\cdot 5=120$.

Př. 6: Dokaž, že pro každé přirozené číslo *n* platí: $3\mid n^3+2n$.

Nejdříve upravíme výraz $n^3+2n=n\left(n^2+2\right)$ $\Rightarrow$ nemůžeme číslo interpretovat jako součin po sobě jdoucích čísel $\Rightarrow$ zkusíme dokazovat pomocí zbytkových tříd.
Všechna přirozená čísla můžeme rozdělit podle dělitelnosti třemi do tří množin $n=3k$, $n=3k+1$ a $n=3k+2$.

- pro $n=3k$: $n^3+2n=n\left(n^2+2\right)=3k\left[(3k)^2+1\right]=3\cdot k\left[(2k)^2+1\right]$ $\Rightarrow$ je dělitelné třemi.
- pro $n=3k+1$:
  $n^3+2n=n\left(n^2+2\right)=(3k+1)\left[(3k+1)^2+2\right]=(3k+1)\left[9k^2+6k+1+2\right]=$
  $=(3k+1)\left(9k^2+6k+3\right)=(3k+1)\cdot 3\cdot\left(3k^2+2k+1\right)$ $\Rightarrow$ je dělitelné třemi,
- pro $n=3k+2$:
  $n^3+2n=n\left(n^2+2\right)=(3k+2)\left[(3k+2)^2+2\right]=(3k+2)\left[9k^2+12k+4+2\right]=$
  $=(3k+2)\left(9k^2+12k+6\right)=(3k+2)\cdot 3\cdot\left(3k^2+4k+2\right)$ $\Rightarrow$ je dělitelné třemi.

Jiná možnost není $\Rightarrow$ pro každé přirozené číslo *n* platí: $3\mid n^3+2n$.

Př. 7: Jakým největším číslem je určitě dělitelný součet pěti po sobě jdoucích čísel?

Obecně neplatí pro součty po sobě jdoucích čísel pravidla podobná pravidlům pro součiny $\Rightarrow$ zkusíme součet upravit.
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10=5(n+2)$ $\Rightarrow$ součet pěti po sobě jdoucích čísel je určitě dělitelný pěti.

Dodatek: Součet *k* po sobě jdoucích čísel je dělitelný číslem *k*, pokud je *k* liché (důkaz v hodině 080204).

Př. 8: Vyslov pravidlo pro dělitelnosti přirozených čísel: a) 18 b) 36.

a) dělitelnost 18
$18 = 2 \cdot 9 \Rightarrow$ číslo je dělitelné 18, právě když je dělitelné 2 a 9 (rozklad $18 = 3 \cdot 6$ použít nemůžeme, protože 3 a 6 jsou čísla soudělná a dělitelnost jednoho souvisí s dělitelností druhého).
a) dělitelnost 36
$36 = 4 \cdot 9 \Rightarrow$ číslo je dělitelné 36, právě když je dělitelné 4 a 9 (rozklady $36 = 6 \cdot 6 = 12 \cdot 3$ použít nemůžeme, protože čísla v nich jsou soudělná a dělitelnost jednoho souvisí s dělitelností druhého).

Př. 9: Rozhodni, zda čísla 437 a 907 jsou prvočísla.

$\sqrt{437} < 23 \Rightarrow$ Nemá cenu zkoušet prvočísla větší než 19.
2,3,5,7,11,13,17 - nejde
$437 = 19 \cdot 23 \Rightarrow$ číslo 437 není prvočíslo.

$\sqrt{907} < 31 \Rightarrow$ Poslední číslo, které vyzkoušíme, je 29.
2,3,5,7,11,13,17,19, 23, 29 - nejde
Číslo 907 je prvočíslo.

Př. 10: Najdi $D(336,588,504)$.

$336 = 3 \cdot 112 = 3 \cdot 4 \cdot 28 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$
$588 = 4 \cdot 147 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 49 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$
$504 = 4 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 14 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
$D(336,588,504) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Př. 11: Najdi $n(120,135,112)$.

$120 = 12 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$135 = 5 \cdot 27 = 3^3 \cdot 5$
$112 = 4 \cdot 28 = 4 \cdot 4 \cdot 7 = 2^4 \cdot 7$
$n(120,135,112) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$

Shrnutí: